УДК 517.958

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ПОДЗЕМНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С МНОГОЗНАЧНЫМ ЗАКОНОМ

© **И.Б. Бадриев**

Ключевые слова: математическое моделирование; установившаяся фильтрация; вариационное неравенство; недифференцируемый функционал; обратно сильно монотонный оператор; итерационный метод.

Рассматривается стационарная задача подземной фильтрации несжимаемой жидкости, следующей многозначному закону фильтрации с предельным градиентом. Обобщенная постановка данной задачи формулируется в виде смешанного вариационного неравенства с монотонным оператором и выпуклым, вообще говоря, недифференцируемым, функционалом в гильбертовом пространстве. Исследована разрешимость этого вариационного неравенства. Для решения вариационного неравенства предложен итерационный метод, не требующий обращения исходного оператора. Каждый шаг итерационного процесса сводится фактически к решению краевой задачи для оператора Лапласа. Проведено исследование сходимости итерационного процесса. Метод был реализован численно.

Рассматривается установившийся процесс фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде, занимающей ограниченную область $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$, с липшиц-непрерывной границей $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, ($\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset$, $\operatorname{mes} \Gamma_1 > 0$, на Γ_1 давление считается равным нулю, Γ_2 — непроницаема). Необходимо найти стационарные поля давления u и скорости v жидкости, удовлетворяющих уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} v(x) = \widetilde{f}(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

(функция $\widetilde{f}$ характеризует плотность внешних источников) и граничным условиям

$$u(x) = 0,\ x \in \Gamma_1, \quad (v(x), \nu(x)) = 0,\ x \in \Gamma_2,\ \nu - \text{ внешняя нормаль к } \Gamma_2, \tag{2}$$

в предположении, что жидкость следует многозначному закону фильтрации [1]

$$-v(x) \in \frac{g(|\nabla u(x)|)}{|\nabla u(x)|}\, \nabla u(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Многозначная функция g может быть представлена в виде $g(\xi) = g_0(\xi) + \vartheta\, H(\xi - \beta)$, $\xi \geqslant 0$, где однозначная функция g_0 и многозначная функция Хевисайда H, задаются формулами

$$g_0(\xi) = \begin{cases} 0\,, & \xi \leqslant \beta \\ \widehat{g}(\xi - \beta)\,, & \xi \geqslant \beta, \end{cases} \qquad H(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ [0,1], & \xi = 0, \\ 1, & \xi > 0. \end{cases}$$

$\beta \geqslant 0$ — заданное число (случай $\beta > 0$ соответствует закону фильтрации с предельным градиентом β). Относительно функции $\widehat{g} : [0, +\infty) \to R^1$ предполагаются выполненными условия:

$$\widehat{g} \ \text{ непрерывна, возрастает,} \tag{4}$$

$$\text{существуют } c_1 > 0,\, c_2 > 0,\, p > 1 \text{ такие, что } c_1\, \xi^{p-1} \leqslant \widehat{g}(\xi) \leqslant c_2\, \xi^{p-1} \text{ при } \xi \geqslant 0. \tag{5}$$

Определим по функции g_0 оператор $G : R^n \to R^n$ следующим образом:

$$G(y) = \begin{cases} g_0(|y|)\,|y|^{-1}\,y\,, & y \neq 0, \\ 0\,, & y = 0. \end{cases}$$

Обозначим через $V = \{u \in \overset{(1)}{W}_p(\Omega) : u(x) = 0\,,\ x \in \Gamma_1\}$ – пространство Соболева с нормой $\|u\|_V = \left(\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p\, dx \right)^{1/p}$, положим $a(u,\eta) = \int\limits_\Omega (G(\nabla u(x)), \nabla \eta(x))\, dx$. В силу условия (5) форма $a(\cdot,\cdot)$ порождает оператор $A : V \to V^*$ по формуле $a(u,\eta) = \langle Au, \eta\rangle$, где $V^* = \overset{(-1)}{W}_{p^*}(\Omega)$ – сопряженное к V пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – отношение двойственности между V и V^*. На V определим функционалы F, F_A по формулам

$$F_A(\eta) = \int\limits_0^1 \langle A(t\,\eta), \eta\rangle\, dt, \quad F(u) = \vartheta \int\limits_\Omega \varphi(|\nabla u(x)| - \beta)\, dx\,, \quad \varphi(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta < 0\,, \\ \zeta, & \zeta \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Предположим, что функция $\widetilde{f}$ порождает линейный и непрерывный функционал f на V: $\langle f, u\rangle = \int\limits_\Omega \widetilde{f}(x) u(x)\, dx$. Под решением стационарной задачи фильтрации (1), (2) несжимаемой жидкости, следующей многозначному закону (3), будем понимать функцию (поле давления) $u \in V$, удовлетворяющую вариационному неравенству

$$\langle Au - f, \eta - u\rangle + F(\eta) - F(u) \geqslant 0 \qquad \forall\, \eta \in V\,. \tag{6}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия* (4), (5). *Тогда оператор* A *является монотонным, непрерывным, коэрцитивным и потенциальным, его потенциалом является функционал* F_A. *Если, кроме того, функция* $\widehat{g}$ *удовлетворяет дополнительно условию*

$$\frac{\widehat{g}(\xi) - \widehat{g}(\eta)}{\xi - \eta} \leqslant c_3(\alpha + \xi + \eta)^{p-2} \quad \forall\, \xi, \eta > 0,\ c_3 > 0, \quad \alpha = \begin{cases} 1, & \text{при}\, p \geqslant 2, \\ 0, & \text{при}\, p < 2, \end{cases} \tag{7}$$

то A *удовлетворяет условию типа ограниченной липшиц-непрерывности* [2, с. 79]

$$\|Au - A\eta\|_{V^*} \leqslant \mu_A(R)\Phi_A(\|u - \eta\|_V) \quad \forall\, u, \eta \in V, \tag{8}$$

где $R = \max\{\|u\|_V, \|\eta\|_V\}$, μ_A *— неубывающая на* $[0,\infty)$ *функция,* Φ_A *— возрастающая на* $[0,\infty)$ *функция,* $\Phi_A(0) = 0$, $\Phi_A(\xi) \to \infty$ *при* $\xi \to \infty$, *причем*

$$\Phi_A(\xi) = \begin{cases} \xi^{p-1}\,, \ 1 < p < 2, \\ \xi, \qquad p \geqslant 2, \end{cases} \quad \mu_A(\xi) = \begin{cases} c_4, & c_4 > 0\,,\ 1 < p < 2, \\ c_5(1 + 2\,\xi)^{p-2}, & c_5 > 0,\ p \geqslant 2. \end{cases}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия* (4), (5). *Тогда вариационное неравенство* (6) *имеет непустое, замкнутое множество решений. Кроме того, найдется такая функция* $v \in [L_{p^*}(\Omega)]^n$, *что выполнено почти всюду на* Ω *включение* (3) *и имеет место равенство*

$$\int\limits_\Omega (v(x)\,,\ \nabla \eta(x))\, dx = \int\limits_\Omega \widetilde{f}(x)\, \eta(x)\, dx \quad \forall\, \eta \in V.$$

Для решения вариационного неравенства (6) рассмотрим следующий итерационный метод. Пусть $u^{(0)}$ — произвольный элемент из V. Для $k=0,1,2,\ldots$ определим $u^{(k+1)}\in V$ как решение вариационного неравенства

$$\left\langle J(u^{(k+1)}-u^{(k)}),\eta-u^{(k+1)}\right\rangle+\tau\left(F(\eta)-F(u^{(k+1)})\right)\geqslant\tau\left\langle f-Au^{(k)},\eta-u^{(k+1)}\right\rangle\ \ \forall\,\eta\in V, \quad (9)$$

где $\tau>0$ — итерационный параметр, удовлетворяющий условию

$$0<\tau<\min\{1,1/\mu_0\},\quad \mu_0=\mu(R_0+\Phi_A^{-1}(R_1+\gamma)),\quad R_0=\sup_{\eta\in S_0}\|\eta\|_V,$$

$$R_1=\sup_{\eta\in S_0}\|A\eta-f\|_{V^*},\quad S_0=\{\eta\in V: F_1(\eta)\leqslant F_1(u^{(0)})\},\quad F_1(\eta)=F_A(\eta)-\langle f,\eta\rangle,$$

$J:V\to V^*$ — оператор двойственности [3, с. 185], порождаемый функцией Φ_A:

$$\langle J\eta,\,\eta\rangle=\|J\eta\|_{V^*}\|\eta\|_V=\Phi_A(\|\eta\|_V)\,\|\eta\|_V.$$

Т е о р е м а 3. *Итерационная последовательность* $\left\{u^{(k)}\right\}_{k=1}^{+\infty}$, *построенная согласно* (9)*, ограничена в* V*, и все ее слабо предельные точки являются решениями задачи* (6).

Итерационный метод (9) был реализован численно. В частности, исследовалась зависимость границ застойных зон (множеств $\Omega_u^-=\{x\in\Omega:|\nabla u(x)|<\beta\}$, где течение жидкости отсутствует) от степени p в законе фильтрации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алишаев М.Г.* О стационарной фильтрации с начальным градиентом // Теория и практика добычи нефти. М.: Недра, 1968. С. 202-211.

2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.

3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00955, 12-01-97022, 13-01-00908.

Badriev I.B. MATHEMATICAL SIMULATION OF STATIONARY SEEPAGE PROBLEM WITH MULTIVALUED LAW

We consider a stationary seepage problem of the incompressible fluid following multivalued filtration law with limiting gradient. Generalized statement of this problem is formulated in the form of mixed variational inequality with monotone operator and convex generally nondifferentiable functional in Hilbert space. We prove the existence theorem for this variational inequality. To solve the variational inequality, we suggest iterative method that does not require the inversion of the original operator. Each step of the iterative process can essentially be reduced to the solution of the boundary-value problem for the Laplace operator. The convergence of iterative consequence is investigated. This method was realized numerically.

Key words: mathematical simulation; steady filtration; variational inequality; nondifferentiable functional; inverse strongly monotone operator; iterative method.